公益効果を含む森林資源の最適回転期間

増　田　信　彦

1．はじめに

森林資源の最適利用においては，樹木の成長に非常に長い期間を必要とすることから，いくらの樹齢で樹木の伐採と植林を繰り返すことにより森林資源を回転させるべきか，という最適回転期間の問題が主要な課題の一つである。その中にも，数多くの考え方があるが，大きく分けて，物理的生産を重視する最大持続生産量の考え方と経済性を重視する最大収益の考え方の2つがある。そして，一般に，最大持続生産量に基づく方が，収益最大化に基づく場合より回転期間が長くなる傾向がある。[1] そのため，「経済優先により森林の樹木を早く切り過ぎているのではないか」という批判がある。

次に，森林資源は，木材を始めとする林産物を供給するという経済効果と洪水防止，土壌保全，水源のかん養，環境緩和，レクリエーション，野生生物や遺伝生物の保護などの公益効果を持っている。森林所有者にとって，経済効果は利益をもたらすが，公益効果はほとんど利益をもたらさないという意味で，森林資源は外部経済性を持つ代表的なものである。ところが，これまでに森林の最適回転期間に関してなされた研究のほとんどは経済効果のみを考察してきた。その主な理由として，公益効果は測定が非常に困難であることが挙げられる。それに対して，近年，公益効果を導入したモデルにおいて最適回転期間を考察するものが出てきている。Hartman〔5〕は初めて立木が提供する公益効果を関数として表し，それと木材価値の和を最大にするように回転期間を求めている。その結果，公益効果を考慮するならば，回転期間が長くなる可能性があることを示している。また，Bowes & Krutilla〔1〕は公益効果が立木の年齢構成に依存するモデルを構築し，森林の多目的利用におけるいろいろな側面を例

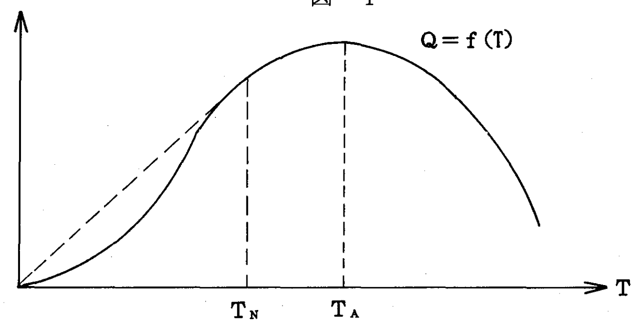
示している。

この小論においては，森林の経済効果と公益効果の関係をより明確にするものとして，樹木量を導入したモデルを作成し，各種の検討を行うことにする。第2節では公益効果が樹木量に依存するモデルを構築し，経済効果と公益効果を合わせた社会的厚生を最大にするような最適回転期間を求める。第3節において，比較静学により，公益効果係数，木材価格，植林コスト，利子率などの変化が最適回転期間に及ぼす影響について調べ，第4節において各種の費用，税，補助金などが，どのような影響を与えるかを考える。第5節では，公益効果が社会的割引率で割り引かれる場合に最適回転期間がどのようになるか述べる。第6節では樹齢における初期条件が最適回転期間に与える影響について調べる。第7節において周期的回転と定常的回転の性質について考える。

2．モデル

森林の環境や経済状態にはいろいろな不確実性が存在するが，ここでは，不確実性はないものと仮定する。また，1本の木を育てるのに必要な土地の広さが樹齢に関係なく一定であると仮定して，断りがあるまで当分の間，その単位面積の林地について考える。従って，間伐を考慮していないことになる。樹木の成長は樹木の種類やその環境により異なるが，典型的な樹木の成長は図－1のように表される。

図－1



ここでは，植林されてT年経過した樹木の量を $Q_T=f(T)$ という成長関数で表し，$f(T)$ は連続2階微分可能で，樹木量が最大となる時点 T_A が1つだけ存在し，$T<T_A$ において $f'(T)>0$，$T>T_A$ において $f'(T)<0$，$f(0)=0$，を仮定する。

次に，樹木量すべてが木材として販売できるわけではないが，簡単化のため，時点Tで伐採される場合，$f(T)$ がすべて販売可能であるとする。一般に，競争市場における単位木材量当たりの価格は，製材用の場合には太いほど高くなるが，ここではその他の用途も含めて価格は一定として，p で表す。すると，木材からの収入は $pf(T)$ となり，時点0における現在価値は割引率をｒとすると，$pf(T)e^{-rT}$ となる。生産費はいろいろなところでかかるが，ここでは植林するための費用だけを考慮し，それを c とすると，純収益の現在価値は $pf(T)e^{-rT}-c$ となる。

次に，森林が持つ公益効果について考える。公益効果の中には，洪水防止，水源のかん養，土壌保全，環境緩和，レクリエーション，野生生物や遺伝生物の保護などがある。これらのそれぞれの効果を森林がどのようにしてもたらすかは，いろいろな要因が関係しており，非常に複雑である。[2] しかし，大まかに言えば，洪水防止の場合，樹木が降雨をしゃ断することと林地の土壌に水が浸透することにより，もたらされる。前者は樹木量が多いほど多くしゃ断される傾向があるし，後者も発達した森林は落葉などの有機物の供給やそれを分解する土壌小動物を通して浸透力のある土壌構造を発展させ易い。また，後者は水源のかん養にも貢献する。土壌保全の場合，洪水防止が侵食を防ぎ，樹木量が多いと根もよく発達し，崩壊を防止する傾向がある。更に，樹木量が多いと，防風，気温の緩和，湿度の保持などの環境緩和をもたらしやすい。

このように，多くの公益効果が樹木の量に大きく依存していると考えられる。ただし，これらが，実際に社会全体にどれだけのメリットをもたらしているかを測定することは極めて困難である。ここでは，公益効果が樹木の量に大きく依存していることを考慮して，それが樹木の量に比例するという大胆な仮

定をおく。すると，時点 t における公益効果の時点 0 における現在価値は $\alpha f(t)e^{-rt}$ で表される。ここで，α（≧ 0）は公益効果係数を示し，その値はその森林地の場所，地形，環境などに依存し，単位樹木量が公益効果で果すことが期待される程度を表す。また，森林の経済効果は樹木を伐採し，販売することによって得られるのに対して，公益効果は樹木がそこに存在することにより絶えずもたらされているので，植林してから伐採するまでの期間Tにおける公益効果の現在価値は

$$\alpha \int_0^T f(t)e^{-rt}dt \quad となる。$$

ここでは森林地が有限である場合を考察しているので，単位森林地から得られる，無限の将来にわたる，経済効果と公益効果を合わせた社会的厚生を最大化することにする。時点 0 で樹木のない林地に植林して，T 年すると伐採し，すぐに植林をし，また T 年すると伐採・植林するというように，このやり方を永遠に繰り返すならば，経済効果と公益効果を合わせた現在価値は次式で表される。

$$W=\left[pf(T)e^{-rT}-c+\alpha\int_0^T e^{-rt}f(t)dt\right]\left(1+e^{-rT}+e^{-2rT}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{pf(T)e^{-rT}-c+\alpha\int_0^T e^{-rt}f(t)dt}{1-e^{-rT}} \qquad \cdots\cdots(1)$$

これを最大にするような最適回転期間 T^* は

$$\frac{dW}{dT}=$$

$$\frac{e^{-rT}\left\{(pf'-prf+\alpha f)(1-e^{-rT})-r\left[pfe^{-rT}-c+\alpha\int_0^T e^{-rt}f(t)dt\right]\right\}}{(1-e^{-rT})^2}$$

$$=0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

を満たす。すると，

$$\int_0^T e^{-rt}dt = -\frac{1}{r}e^{-rt}\Big|_0^T = \frac{1}{r}(1-e^{-rT}) \qquad \cdots\cdots(3)$$

より，

$$\frac{dW}{dT} = \frac{e^{-rT}\left\{p(f'-rf)(1-e^{-rT}) - r\left[pfe^{-rT} - c - \alpha\int_0^T e^{-rt}[f(T)-f(t)]dt\right]\right\}}{(1-e^{-rT})^2}$$

$$= 0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

故に，

$$pf' - prf + \alpha f = \frac{r\left[pfe^{-rT} - c + \alpha\int_0^T e^{-rt}f(t)dt\right]}{1-e^{-rT}} \qquad \cdots\cdots(5)$$

あるいは，

$$p(f'-rf) = \frac{r\left\{pfe^{-rT} - c - \alpha\int_0^T e^{-rt}[f(T)-f(t)]dt\right\}}{1-e^{-rT}} \qquad \cdots\cdots(6)$$

ここで，$\int_0^T e^{-rt}[f(T)-f(t)]dt = 0$ となる時点を T_B とすると，$T^* \leqq T_B$ となる。そして，

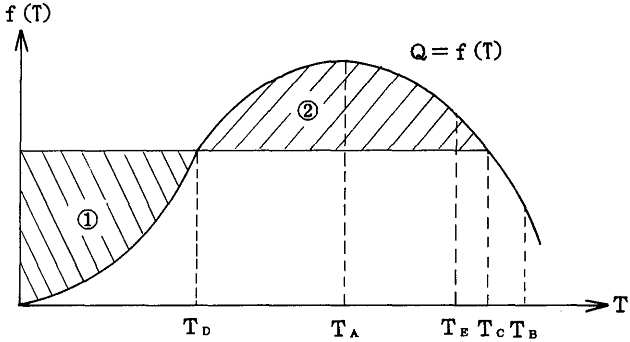
$$T^*\text{は}\ \int_0^T e^{-rt}[f(T)-f(t)]dt \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(7)$$

を満たす。[3] また，伐採時の樹木量がそれまでの樹木量の平均となる時点，すなわち，

$$f(T) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \qquad \cdots\cdots(8)$$

を満たす時点を T_C とすると，$T_B > T_C$ となる。T_C は，図－2において①の面積と②の面積が同じになる時点である。[4]

図－２



最適回転期間 T^* が満たす(5)は木材価格p，植林コストc，公益効果係数αに関して０次の同次関数となっている。また，(5)より，$pf' + \alpha f = r(pf + W)$ と表される。左辺は伐採樹齢を延ばすことにより得られる木材価値の増加と公益効果の増加であり，右辺は伐採を延ばすことによって失われる機会費用，すなわち木材価値への利子と森林の社会的厚生に対する利子の和である。

$\alpha = 0$ の時は，公益効果が無い場合，あるいは森林管理者が経済効果のみを考慮する場合を意味し，これまで多くの研究がなされた場合である。この時，(5)は

$$pf' - prf = \frac{r(pfe^{-rT} - c)}{1 - e^{-rT}}$$

となり， Faustmann〔３〕のルールの解である。ここで右辺は正であるので，左辺より$f' > 0$となり，伐採期は樹木の量が最大となる時点（図－１の T_A）より必ず早くなる。

それに対して，αの値が大きい場合には，(6)において

$$\frac{\alpha r \int_0^T e^{-rt}[f(T) - f(t)]dt}{1 - e^{-rT}} > 0$$

が大きくなるため，$f'(T) < 0$　となり，伐採期が樹木量の減少する樹齢となることが充分ありうることを意味する。これはHartman〔5〕と同様の結果である。経済効果のみを考慮する場合，最大持続生産量に基づく場合（図－1のT_N）に比べて，伐採時期が早くなる傾向があるが，公益効果を考慮する場合と比べると，更に格段に早くなっている可能性があることを示している。

3．比較静学

ここでは，公益効果係数，利子率，植林コスト，木材価格などの変化が最適回転期間にどのような影響を与えるかを調べる。まず，前提となる仮定について述べる。森林の社会的厚生関数の2階の条件を

$$\text{(A 1)} \qquad \frac{d^2W}{dT^2} < 0$$

とする。大域的にこの条件が満たされることはむずかしいが，最適解を含めて局所的には成り立つことは充分考えられる。ただし，局所的な場合，この仮定を前提にして得られる結果はそれらの局所にしか当てはまらないことになる。

次に，比較静学のために(4)を

$$G(T) = \frac{dW}{dT} = 0$$

とおき，その最適解を　$T = g(\alpha, r, c, p)$　とする。そして，それを$G(T) = 0$　に代入して偏微分すると，それぞれのパラメーターあるいは外生変数の回転期間に対する影響を調べることができる。

① 公益効果係数αの影響

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{\partial G}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial G}{\partial \alpha} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{-\dfrac{\partial G}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial G}{\partial T}} = \frac{-\dfrac{\partial G}{\partial \alpha}}{\dfrac{d^2W}{dT^2}}$$

（A 1）を仮定すると，

$$sign\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) = sign\left(\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right)$$

(4)より

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{re^{-rT}\int_0^T e^{-rt}[f(T)-f(t)]dt}{(1-e^{-rT})^2} > 0$$

故に，

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} > 0 \qquad \cdots\cdots(9)$$

すなわち，公益効果係数が大きくなれば，回転期間が長くなる傾向がある。

② 利子率 r の影響

$$\frac{\partial G}{\partial r} \gtreqless 0 \quad \text{より} \quad \frac{\partial T}{\partial r} \gtreqless 0$$

利子率の上昇が回転期間に与える影響は，はっきりしていない。

③ 木材価格 p の影響

①と同様に，（A 1）を仮定すると，

$$sign\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = sign\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial p} = \frac{e^{-rT}[(f'-rf)(1-e^{-rT})-rfe^{-rT}]}{(1-e^{-rT})^2}$$

$$= \frac{-\frac{r}{p}\left\{c+\alpha\int_0^T e^{-rt}[f(T)-f(t)]dt\right\}}{e^{rT}(1-e^{-rT})^2} \quad \text{((6)より)}$$

$$< \quad 0$$

故に，

$$\frac{\partial T}{\partial p}<0 \qquad \cdots\cdots(10)$$

すなわち，木材価格が上昇すれば，回転期間が短くなる傾向がある。

④　植林コスト c の影響

①と同様に，（A 1）を仮定すれば，

$$sign\left(\frac{\partial T}{\partial c}\right)=sign\left(\frac{\partial G}{\partial c}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial c}=\frac{e^{-rT}r}{(1-e^{-rT})^2}>0$$

従って　$\frac{\partial T}{\partial c} > 0$

すなわち，植林コストが増加すれば，回転期間が長くなりやすいことを示す。これは植林コストが増加すると，森林管理者が植林の回数を減らそうとするからであると考えられる。

4．各種の費用，税，補助金の影響

樹木を育成，収穫するにはこれまで考慮した植林以外に下草刈り，枝下ろし，間伐，伐採，運搬などの費用がかかる。ここでは，まず，各種の費用が最適回転期間にどのような影響を与えるかを考察する。

①一定の育成費用

時間当たりの育成費用を一定として，c_1 を費用係数とするならば，森林の社会的厚生は，

$$W_1=\frac{pf(T)e^{-rT}-c-c_1\int_0^T e^{-rt}dt+\alpha\int_0^T e^{-rt}f(t)dt}{1-e^{-rT}}$$

$$=\frac{pf(T)e^{-rT}-c+\alpha\int_0^T e^{-rt}f(t)dt-c_1\dfrac{1-e^{-rT}}{r}}{1-e^{-rT}}$$

$$=W-\frac{c_1}{r}$$

故に　$\dfrac{dW_1}{dT}=\dfrac{dW}{dT}$

となり，一定の育成費用は回転期間に影響を与えないことになる。

②樹木量に比例する育成費用

育成費が樹木量に比例する場合には，c_2 を費用係数とすると，社会的厚生は，

$$W_2=\frac{pf(T)e^{-rT}-c-\int_0^T e^{-rt}c_2f(t)dt+\alpha\int_0^T e^{-rt}f(t)dt}{1-e^{-rT}}$$

$$=\frac{pf(T)e^{-rT}-c+(\alpha-c_2)\int_0^T e^{-rt}f(t)dt}{1-e^{-rT}}$$

$\alpha'=\alpha-c_2$ とおくと，W_2 は(1)のWにおいてαがα'に置き換えられたものである。それ故，樹木量に比例する育成費は公益効果が少ないのと同じ働きをすることになる。従って，該当する期間Tにおいて（A 1）を仮定するならば，樹木量に比例する育成費がかかる場合，(9)より，回転期間が短くなる傾向がある。

③収穫費用

伐採，運搬などの収穫費用が樹木量に比例すると仮定する。c_3 を費用係数とすると，社会的厚生は

$$W_3=\frac{(p-c_3)f(T)e^{-rT}-c+\alpha\int_0^T e^{-rt}f(t)dt}{1-e^{-rT}}$$

となる。$p'=p-c_3$ とおくと，W_3 は(1)のWにおいてpがp'に置き換えられたものである。それ故，収穫費用は価格が低いのと同じ働きをすることになる従って，該当する期間Tにおいて（Ａ１）を仮定すれば，収穫費用がかかる場合，⑽より，回転期間が長くなることになる。

次に，各種の税や補助金が回転期間にどのような影響を与えるかを考察するその際，森林管理者は経済効果のみを考慮して行動しているものと仮定するすると，その目的式は

$$V=\frac{pf(T)e^{-rT}-c}{1-e^{-rT}}$$

となり，これは(1)において $\alpha=0$ の場合である。経済効果のみを考慮するモデルにおける税の影響に関しては，売上税，賃金基金税，利潤税，資本利得税，資産税，定額税などについてすでに他で考察されている。[5] ここでは，回転期間に対する政策的含意との関連で，その中の売上税と資産税についてのみ取り扱うことにする。

④売上税

売上税を収入の一定割合 t_1 とすると，純収益の現在価値は

$$V_1=\frac{(1-t_1)pf(T)e^{-rT}-c}{1-e^{-rT}}$$

となる。ここで $p'=(1-t_1)p$とおくと，V_1 は，(1)のWにおいて $\alpha=0$ の時，pがp'に置き換えられたものである。それ故，売上税は価格が低いのと同じ働きをすることになる。従って，$\alpha=0$ の時，該当するTにおいて，（Ａ１）が成り立つと仮定するならば，⑽より売上税は回転期間を長くする。このことは，森林管理者が経済効果のみを考慮している場合に売上税を課すことは，公益効果も考慮する場合と，大きさはともかく，同じ方向の影響をもたらすので，社会的厚生の観点からは望ましいことになる。

⑤資産税（立木）

ここでは，立木の価値 $pf(t)$ に対して一定割合 t_2 を課する資産税を考え

る。その時，純収益の現在価値は

$$V_2=\frac{pf(T)e^{-rT}-c-t_2p\int_0^T f(t)e^{-rt}dt}{1-e^{-rT}}$$

となる。$\alpha'=-t_2p$ とおくと，V_2 は(1)のWにおいてαがα'で置き換えられたものである。それ故，立木に対する資産税は公益効果がマイナスの方向に働いているのと同じになる。従って，該当するTにおいて，（A 1）が成り立つならば，(9)より立木に対する資産税は回転期間を短くする方向に働くことになる。これは社会的厚生の立場からは望ましくないもので，政策的にはこの税よりも売上税が望ましいことになる。

更に，ある型の補助金が回転期間にどのような影響を与えるかを調べる。

⑥樹木量に比例する補助金

森林管理者が毎期樹木量に比例する補助金を受けるか，あるいはその額だけ彼の税から控除されるものとする。sを補助係数とすると，純収益の現在価値は

$$V_3=\frac{pf(T)e^{-rT}-c+\int_0^T sf(t)e^{-rt}dt}{1-e^{-rT}}$$

これは，(1)のWにおいてαがsに置き換えられたものである。それ故，相応するTにおいて，（A 1）が成り立つことを仮定するならば，(9)よりこの補助金は回転期間を長くすることになる。その上，もし $s=\alpha$ ならば，森林管理者はあたかも公益効果を考慮しているかのように行動することになる。

5．社会的割引率

資源の最適利用のためには，市場利子率が社会的割引率と等しいことが必要である。しかし，現実には，個人にとって将来が不確実であること，そのリスクを回避するための先物市場や保険市場が不完全であること，個人が社会より短いタイム・スパンで物事を考える傾向があることなどの理由から，市場利子

率が社会的割引率より高いと考えられている。ここでは，このことを考慮して，経済効果を市場利子率 r で，また公益効果を社会的割引率 γ で割り引くモデルを作成してみる。その際，$r \geqq \gamma$ が仮定されている。そうすると，森林の社会的厚生は，

$$\hat{W}=\frac{pf(T)e^{-rT}-c}{1-e^{-rT}}+\frac{\alpha\int_0^T e^{-\gamma t}f(t)dt}{1-e^{-\gamma T}}$$

で表される。これを最大にするような最適回転期間 $\hat{T}$ は $\frac{d\hat{W}}{dT}=0$ を満たすもので，それを解くと，

$$p(f'-rf)-\frac{r(pfe^{-rT}-c)}{1-e^{-rT}}+\frac{\alpha\gamma e^{T(r-\gamma)}(1-e^{-rT})}{(1-e^{-\gamma T})^2}$$

$$\times\int_0^T e^{-\gamma t}[f(T)-f(t)]dt=0$$

が得られる。[6]

これより，公益効果を社会的割引率で割り引く場合に，利子率で割り引く場合と比べて，回転期間がどのような影響を受けるかを調べる。まず，次の仮定をおく。

$$\text{(A 2)}\qquad \int_0^T te^{-\gamma t}[f(T)-f(t)]dt \geqq 0 \cdots\cdots(11)$$

という条件をTが満たす。なお，(11)が等号で成り立つ時点を T_E とおけば，(A 2）は，Tが $T \leqq T_E$ となるような範囲で考えることを意味する。また，T_E は $T_A < T_E < T_B$ という性質を持っている。[7]

ここで，

$$\beta(\gamma,T)=\frac{\alpha\gamma e^{-\gamma T}\int_0^T e^{-rt}[f(T)-f(t)]dt}{(1-e^{-\gamma T})^2}$$

$$-\frac{\alpha re^{-rT}\int_0^T e^{-rt}[f(T)-f(t)]dt}{(1-e^{-rT})^2},$$

$$\phi(\gamma,T)=p(f'-rf)-\frac{r(pfe^{-rT}-c)}{1-e^{-rT}}+\frac{\alpha r\int_0^T e^{-rt}[f(T)-f(t)]dt}{1-e^{-rT}}$$

$$+e^{rT}(1-e^{-rT})\beta(\gamma,T) \qquad \cdots\cdots(12)$$

とおくと，(4)より

$$\phi(\gamma,T)=e^{rT}\left(1-e^{-rT}\right)\left[\frac{dW}{dT}+\beta(\gamma,T)\right] \qquad \cdots\cdots(13)$$

そして，　$\phi(\gamma,\hat{T})=0$　……(14)

更に，　$\gamma=r$ の時，　$\beta(r,T)=0$，そして，(6)より

$$\phi(r,T^*)=0 \qquad \cdots\cdots(15)$$

が得られる。次に，（A 2）を仮定すると，$\beta(\gamma,T)>0$ が得られる。[8] (12)において，$\beta(\gamma,T)>\beta(r,T)\ (=0)$ より，$\phi(\gamma,T)>\phi(r,T)$ となる。故に，(14)及び(15)より

$$\phi(r,\hat{T})<\phi(\gamma,\hat{T})=0=\phi(r,T^*) \qquad \cdots\cdots(16)$$

次に，(13)において $\gamma=r$ の時，$\beta(r,T)=0$　より，

$\phi(r,T)=(e^{rT}-1)\,W'(T)$

また，該当するTにおいて（A 1）を仮定すれば，$W'(T^*)=0$　より，

$0<T<T^*$　において　$W'(T)>0$，　従って　$\phi(r,T)>0$。

$T^*<T$　において　$W'(T)<0$，　従って　$\phi(r,T)<0$。

故に，(16)より　$\hat{T}>T^*$　が得られる。

すなわち，公益効果を社会的割引率で割り引いた場合には，利子率で割り引いた場合と比べて，回転期間が長くなる傾向があることを示している。

6．初期条件の影響

これまでは時点 0 において樹木がない林地に植林することから始めることを前提としてきた。ここでは，時点 0 においてすでに樹齢 t_0 の樹木があり，それをいつ伐採，植林し，その後はこれまでと同様に，樹齢いくらで伐採，植林を繰り返すかについて考察する。その時の森林の社会的厚生は，

$$W_4=pf(t_0+T_0)e^{-rT_0}+\alpha\int_0^{T_0}e^{-rt}f(t_0+t)dt$$

$$+e^{-rT_0}\frac{pf(T)e^{-rT}-c+\alpha\int_0^{T}e^{-rt}f(t)dt}{1-e^{-rT}}$$

である。ここで，T_0 は樹齢 t_0 の樹木を伐採するまでの期間である。社会的厚生を最大にする T_0と T は

$$\frac{\partial W_4}{\partial T_0}=pf'(t_0+T_0)e^{-rT_0}-rpf(t_0+T_0)e^{-rT_0}+\alpha e^{-rT_0}f(t_0+T_0)$$

$$-re^{-rT_0}\frac{pf(T)e^{-rT}-c+\alpha\int_0^{T}e^{-rt}f(t)dt}{1-e^{-rT}}\leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

$$\frac{\partial W_4}{\partial T}=e^{-rT_0}\frac{(pf'e^{-rT}-rpfe^{-rT}+\alpha fe^{-rT})(1-e^{-rT})-[pfe^{-rT}-c}{(1-e^{-rT})^2}$$

$$\frac{+\alpha\int_0^{T}e^{-rt}f(t)dt]re^{-rT}}{}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

を満たす。(17)において不等号が使われているのは $T_0\geqq 0$ という制約があるからである。[9] (18)から

$$pf'-rpf+\alpha f=\frac{r[pfe^{-rT}-c+\alpha\int_0^{T}e^{-rt}f(t)dt]}{1-e^{-rT}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

が得られる。これは(5)と同じであり，最初の伐採後の最適回転期間は時点０において樹木のない場合の最適回転期間 T^* と同じになる。次に，(17)より

$$pf'(t_0+T_0)-rpf(t_0+T_0)+\alpha f(t_0+T_0)\leqq$$

$$\frac{r\left[pf(T^*)e^{-rT^*}-c+\alpha\int_0^{T^*}e^{-rt}f(t)dt\right]}{1-e^{-rT^*}}$$

$T_0>0$ の時，この式は等号で成り立ち，(19)より $t_0+T_0=T^*$，すなわち $t_0<T^*$の時， $T_0=T^*-t_0$。また，$t_0\geqq T^*$の時，$T_0=0$。
これは次のことを意味する。最初にもし樹齢がT^*以上ならば，すぐに伐採と植林をし，もし樹齢がT^*未満ならば，T^*になるのを待って，伐採と植林をし，その後は樹齢T^*で伐採と植林を繰り返すことが社会的厚生を最大にする。公益効果のない場合に，同様の結果が，Mitra＆Wan〔８〕によって，より一般的な形で得られている。ここでは，公益効果のある場合にそれを簡単に導いたものである。

７．周期的回転と定常的回転

これまでは１本の木を育成するのに必要な単位面積の林地を考えてきたが，これよりＮ本の木を育成できる森林を考える。一般に，１つの森林には異なる年齢の樹木があり，その年齢分布は伐採，植林のしかたにより時間と共に変化する。この樹木の年齢分布の変化をもたらす森林の回転には，２つの代表的な型がある。１つは周期的回転であり，これは，その森林のすべての樹木を同時に伐採，植林することを繰り返すもので，ある時点における樹木の年齢はすべて同じになる。もう１つは定常的回転であり，これは，毎期，同じ本数の樹木を伐採，植林することを繰り返すもので，樹木の年齢分布は時間を通じて一定となる。これら２つの極端な型の間に，それ以外の場合，すなわち，部分的に周期的回転を行っている，いくつかの異なる面積を持つ区画のある場合が存在

する。[10]

ここでは，森林のある区画の樹木の成長や経済的条件が，他の区画の森林管理の方法とはまったく独立であると仮定する。すると，森林全体の社会的厚生を最大にするためには，それぞれの単位区画から得られる社会的厚生を最大にすればよいことになる。その結果，それぞれの樹木において，最初に樹齢が$t_0 \geqq T^*$ならば，すぐに伐採，植林をし，$t_0 < T^*$ならば，T^*になるまで待って伐採，植林をし，その後は期間T^*で伐採，植林を繰り返すことになる。

① 周期的回転

この場合が成り立つためには，初期条件において，すべての樹木の年齢が同じであるか，あるいはすべての樹木の年齢がT^*以上でなければならない。前者の場合には，すべての樹木の年齢がT^*になった時，それらの伐採，植林をする。後者の場合，すぐにすべての樹木の伐採と植林をするので，すべての樹木の年齢が同じになる。従って，森林の区画間の独立性が仮定されている場合には，周期的回転は，初期条件がそれまで期間T^*の周期的回転をしてきた結果として出てきた場合か，あるいは長期にわたって伐採が行われなかった場合にのみ可能となる。すべての樹木の年齢が同じt_0（$<T^*$）の場合には，その森林の社会的厚生は

$$W_5 = N\Big[pf(T^*)e^{-r(T^*-t_0)} + \alpha \int_0^{T^*-t_0} e^{-rt} f(t_0+t)\,dt + e^{-r(T^*-t_0)} \frac{pf(T^*)e^{-rT^*} - c + \alpha \int_0^{T^*} e^{-rt} f(t)\,dt}{1-e^{-rT^*}} \Big]$$

となる。

② 定常的回転

この場合が成り立つためには，初期条件において，樹齢が０からT^*までの樹木が，それぞれN/T^*本づつ存在することが必要である。すると，毎期，樹齢がT^*になる樹木N/T^*本を伐採，植林することにより，定常的状態が保持され

る。従って，森林の区画間の独立性を仮定する場合には，定常的回転は，初期条件がそれまで期間T^*の定常的回転をしてきた結果として出てきた場合にのみ可能となる。

この場合には，森林の社会的厚生は

$$W_6=\frac{N}{T^*}\int_0^{T^*}\Big[\,pf(T^*)e^{-r(T^*-t_0)}+\alpha\int_0^{T^*-t_0}e^{-rt}f(t_0+t)dt$$

$$+e^{-r(T^*-t_0)}\frac{pf(T^*)e^{-rT^*}-c+\alpha\int_0^{T^*}e^{-rt}f(t)dt}{1-e^{-rT^*}}\Big]dt_0$$

となる。これより，

$$W_6=\frac{N}{T^*}\Big[\,pf(T^*)-c+\alpha\int_0^{T^*}f(t)dt\Big]\cdot\int_0^{\infty}e^{-rt}dt$$

が導かれ，各期の社会的厚生も定常的に得られていることが確認される。[11)]

注

1) 森林の最適回転期間に関する分析や歴史的経緯などについては，例えば，Goundrey〔4〕，Samuelson〔9〕を参照。

2) 森林が公益効果をもたらす各種作用の技術面については，例えば，只木，吉良〔10〕を参照。

3) $T^*\leqq T_B$ を背理法により導く。今，$T^*>T_B$ （$>T_A$ ）とする。

$$\frac{d}{dT}\Big\{\int_0^T e^{-rt}[f(T)-f(t)]dt\Big\}=e^{-rT}[f(T)-f(T)]+\int_0^T e^{-rt}f'(T)dt$$
$$=f'(T)\int_0^T e^{-rt}dt.$$

$T>T_A$ において $f'(T)<0$ より，

$\int_0^T e^{-rt}[f(T)-f(t)]\,dt$ はTの減少関数であるので，

$\int_0^{T^*} e^{-rt}[f(T^*)-f(t)]\,dt<0$ となる。そのため，(4)の公益効果の部分が負となる。また，$T^*>T_A$より，経済効果の部分も負となる。従って，$\frac{dW}{dT}=0$が成り立たず，矛盾が生じる。故に，$T^*\leqq T_B$ 。

4) これらは次のようにして導かれる。(8)より

$$0 = Tcf(Tc) - \int_0^{Tc} f(t)\ dt = \int_0^{Tc} [f(Tc) - f(t)]\ dt。$$

$T<T_A$ において$f(T)=f(Tc)$ となるTをT_D とする。

$$\int_0^{Tc} e^{-rt} [f(Tc) - f(t)]\ dt$$

$$= \int_0^{T_D} e^{-rt} [f(Tc) - f(t)]\ dt + \int_{T_D}^{Tc} e^{-rt} [f(Tc) - f(t)]\ dt$$

$$> \int_0^{T_D} e^{-rT_D} [f(Tc) - f(t)]\ dt + \int_{T_D}^{Tc} e^{-rT_D} [f(Tc) - f(t)]\ dt$$

$$= e^{-rT_D} \int_0^{Tc} [f(Tc) - f(t)]\ dt = 0$$

$\int_0^{T} e^{-rt} [f(T) - f(t)]\ dt$ はTの減少関数であり，

$T=T_C$において正，$T=T_B$においてゼロであるので，$T_B>T_C$ となる。

5) 例えば，Löfgren & Johansson[7]を参照。

6) それは次のようにして得られる。

$$\frac{d\hat{W}}{dT} = \frac{(pf'e^{-rT} - prfe^{-rT})(1-e^{-rT}) - (pfe^{-rT} - c)re^{-rT}}{(1-e^{-rT})^2}$$

$$+ \frac{\alpha e^{-\gamma T} f(1-e^{-\gamma T}) - \left[\alpha \int_0^T e^{-\gamma t} f(t)dt\right] \gamma e^{-\gamma T}}{(1-e^{-\gamma T})^2}$$

$$= \frac{e^{-rT}[p(f'-rf)(1-e^{-rT}) - r(pfe^{-rT} - c)](1-e^{-\gamma T})^2}{(1-e^{-rT})^2(1-e^{-\gamma T})^2}$$

$$+ \frac{\alpha e^{-\gamma T}\left[f\gamma \int_0^T e^{-\gamma t}dt - \gamma \int_0^T e^{-\gamma t} f(t)dt\right](1-e^{-rT})^2}{(1-e^{-rT})^2(1-e^{-\gamma T})^2} \quad \text{((3)と同様にして)}$$

$$= \frac{e^{-rT}[p(f'-rf)(1-e^{-rT}) - r(pfe^{-rT} - c)](1-e^{-\gamma T})^2}{(1-e^{-rT})^2(1-e^{-\gamma T})^2}$$

$$\frac{+\alpha\gamma e^{-\gamma T} \int_0^T e^{-\gamma t}[f(T) - f(t)]dt (1-e^{-rT})^2}{} = 0$$

$$\therefore p(f'-rf)(1-e^{-rT}) - r(pfe^{-rT} - c)$$

$$+ \frac{\alpha\gamma e^{T(r-\gamma)}(1-e^{-rT})^2 \int_0^T e^{-\gamma t}[f(T) - f(t)]dt}{(1-e^{-\gamma T})^2} = 0$$

7) まず，$T_E>T_A$ を示す。$0<t<T \leqq T_A$ において，te^{-rt} $[f(T) - f(t)] > 0$。従っ

て，任意の $0<T\leqq T_A$ において，

$$\int_0^T te^{-\gamma t}[f(T)-f(t)]dt>0 \text{となり，}$$

$T_E\leqq T_A$ ということはない。次に，$T>T_A$ において，$f'(T)<0$ より

$$\frac{d}{dT}\left\{\int_0^T te^{-\gamma t}[f(T)-f(t)]dt\right\}$$
$$=Te^{-\gamma T}[f(T)-f(T)]+\int_0^T te^{-\gamma t}f'(T)\,dt=f'(T)\int_0^T te^{-\gamma t}dt<0 \cdots\cdots (*)$$

故に，$T_E>T_A$.

次に，$T_E<T_B$ を導く。第1段階として，

$$\int_0^T e^{-\gamma t}[f(T)-f(t)]dt=0 \quad \text{となる}T\text{を}T_F\text{として，}$$

$T_F<T_B$ となることを示す。

$f(T)$ の形より，$f(T_F)\geqq f(t)$，$0\leqq t\leqq T_G$

$f(T_F)\leqq f(t)$，$T_G\leqq t\leqq T_F$

となる T_G が存在し，$f(T_G)=f(T_F)$ となる。すると，

$$\int_0^{T_F} e^{-rt}[f(T_F)-f(t)]dt=\int_0^{T_F} e^{(\gamma-r)t}\cdot e^{-\gamma t}[f(T_G)-f(t)]dt$$
$$=\int_0^{T_G} e^{(\gamma-r)t}\cdot e^{-\gamma t}[f(T_G)-f(t)]dt+\int_{T_G}^{T_F} e^{(\gamma-r)t}\cdot e^{-\gamma t}[f(T_G)-f(t)]dt$$
$$>\int_0^{T_G} e^{(\gamma-r)T_G}\cdot e^{-\gamma t}[f(T_G)-f(t)]dt+\int_{T_G}^{T_F} e^{(\gamma-r)T_G}\cdot e^{-\gamma t}[f(T_G)-f(t)]dt$$
$$=\int_0^{T_F} e^{(\gamma-r)T_G}\cdot e^{-\gamma t}[f(T_G)-f(t)]dt$$
$$=e^{(\gamma-r)T_G}\int_0^{T_F} e^{-\gamma t}[f(T_F)-f(t)]dt=0$$

注3)より，$T>T_A$ において $\int_0^T e^{-rt}[f(T)-f(t)]dt$ は T の減少関数なので，$T_F<T_B$ となる。

さらに，第2段階として，$T_E<T_F$ を求める。

$$\int_0^{T_F} te^{-\gamma t}[f(T_F)-f(t)]dt$$
$$=\int_0^{T_G} te^{-\gamma t}[f(T_G)-f(t)]dt+\int_{T_G}^{T_F} te^{-\gamma t}[f(T_G)-f(t)]dt$$
$$<\int_0^{T_G} T_Ge^{-\gamma t}[f(T_G)-f(t)]dt+\int_{T_G}^{T_F} T_Ge^{-\gamma t}[f(T_G)-f(t)]dt$$
$$=T_G\int_0^{T_F} e^{-\gamma t}[f(T_F)-f(t)]dt=0$$

(*)より，$\int_0^T te^{-\gamma t}[f(T)-f(t)]dt$ は T の減少関数なので，

$T_E < T_F$。　故に，$T_E < T_B$が得られる。

8)　$\beta(\gamma, T) > 0$は次のように導かれる。

$$\frac{d\beta(\gamma,T)}{d\gamma}=\frac{\left\{(\alpha e^{-\gamma T}-\alpha\gamma Te^{-\gamma T})\int_0^T e^{-\gamma t}[f(T)-f(t)]dt\right.}{(1-e^{-\gamma T})^4}$$

$$\frac{\left.-\alpha\gamma e^{-\gamma T}\int_0^T te^{-\gamma t}[f(T)-f(t)]dt\right\}(1-e^{-\gamma T})^2}{}$$

$$\frac{-\alpha\gamma e^{-\gamma T}\int_0^T e^{-\gamma t}[f(T)-f(t)]dt\cdot 2(1-e^{-\gamma T})Te^{-\gamma T}}{}$$

$$=\frac{\alpha e^{-\gamma T}\left\{(1-\gamma T-e^{-\gamma T}-\gamma Te^{-\gamma T})\int_0^T e^{-\gamma t}[f(T)-f(t)]dt\right.}{(1-e^{-\gamma T})^3}$$

$$\frac{\left.-\gamma(1-e^{-\gamma T})\int_0^T te^{-\gamma t}[f(T)-f(t)]dt\right\}}{}$$

ここで$x=\gamma T$，$g(x)=1-x-e^{-x}-xe^{-x}$

とおくと，

$$g(0)=0,\ g'(x)=-1+e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=\frac{x}{e^x}-1<0$$

従って，$x>0$において$1-x-e^{-x}-xe^{-x}<0$。

それ故，$T \leqq T_E < T_B$において，(7)及び(11)より

$$\frac{d\beta(\gamma,T)}{d\gamma}<0$$

故に，$\beta(r,T)=0$より，$\gamma<r$において，$\beta(\gamma, T)>0$が得られる。

9)　非負の変数がある場合の最適化については，例えば，Lancaster〔6〕を参照。

10)　これらについては，例えば，Dasgupta〔2〕，Mitra & Wan〔8〕を参照。

11)　これは次のように導かれる。ここでは，T^*の＊印を省略する。

$$W_6=\frac{N}{T}\left\{\int_0^T\left[pf(T)e^{-r(T-t_0)}+e^{-r(T-t_0)}\frac{pf(T)e^{-rT}-c}{1-e^{-rT}}\right]dt_0\right.$$

$$\left.+\alpha\int_0^T\int_0^{T-t_0}e^{-rt}f(t_0+t)dtdt_0+\frac{\alpha}{1-e^{-rT}}\int_0^T e^{-r(T-t_0)}\int_0^T e^{-rt}f(t)dtdt_0\right\}$$

ここで，$\int_0^T \int_0^{T-t_0} e^{-rt} f(t_0+t)\,dt\,dt_0$

$$= \int_0^T e^{-rt} \int_0^{T-t} f(t_0+t)\,dt_0\,dt \quad \text{（積分順序の逆転により）}$$

$$= \int_0^T e^{-rt} \int_t^T f(\tau)\,d\tau\,dt \quad \text{（}\tau=t_0+t\text{とおくと，}d\tau=dt_0\text{となるので）}$$

$$= \int_0^T e^{-rt} \left[F(T)-F(t)\right] dt \quad \left(F(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau\text{とおくことにより}\right)$$

$$= F(T)\int_0^T e^{-rt}dt - \int_0^T e^{-rt}F(t)\,dt$$

(3)及び部分積分により

$$= \frac{F(T)(1-e^{-rT})}{r} - \left[-\frac{1}{r}e^{-rt}F(t)\Big|_0^T - \int_0^T -\frac{1}{r}e^{-rt}f(t)dt \right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[F(T)-F(T)e^{-rT}+e^{-rT}F(T)-F(0)-\int_0^T e^{-rt}f(t)dt \right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\int_0^T f(t)\,dt - \int_0^T e^{-rt}f(t)\,dt \right]$$

すると，

$$W_6 = \frac{N}{T}\left\{ \int_0^T e^{-r(T-t_0)} \frac{pf(T)(1-e^{-rT})+pf(T)e^{-rT}-c}{1-e^{-rT}} dt_0 \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{r}\left[\int_0^T f(t)\,dt - \int_0^T e^{-rt}f(t)\,dt \right] + \frac{\alpha e^{-rT}}{1-e^{-rT}} \int_0^T e^{rt_0}\,dt_0 \int_0^T e^{-rt}f(t)\,dt \right\}$$

$$= \frac{N}{T}\left\{ \frac{e^{-rT}\left[pf(T)-c\right]}{1-e^{-rT}} \int_0^T e^{rt_0}\,dt_0 + \frac{\alpha}{r}\left[\int_0^T f(t)\,dt - \int_0^T e^{-rt}f(t)\,dt \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha e^{-rT}}{1-e^{-rT}}\cdot\frac{e^{rT}-1}{r} \int_0^T e^{-rt}f(t)\,dt \right\} \quad \left(\int_0^T e^{rt}dt = \frac{1}{r}e^{rt}\Big|_0^T = \frac{e^{rT}-1}{r}\text{より} \right)$$

$$= \frac{N}{T}\left\{ \frac{e^{-rT}\left[pf(T)-c\right]}{1-e^{-rT}} \cdot \frac{e^{rT}-1}{r} + \frac{\alpha}{r}\int_0^T f(t)\,dt \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha}{r}\int_0^T e^{-rt}f(t)\,dt + \frac{\alpha}{r}\int_0^T e^{-rt}f(t)\,dt \right\}$$

$$=\frac{N}{rT}\left[pf(T)-c+\alpha\int_0^T f(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{N}{T}\left[pf(T)-c+\alpha\int_0^T f(t)\,dt\right]\cdot\int_0^\infty e^{-rt}dt$$

参 考 文 献

〔1〕 Bowes,M.D.and Krutilla, J.V.,"Multiple Use Management of Public Forestlands",in *Handbook of Natural Resource and Energy Economics*,Vol.Ⅱ,(Kneese,A.V.and Sweeney,J.L.,ed.),Elsevier,1985,531-569.

〔2〕 Dasgupta,P.,*The Control of Resources*, Basil Blackwell, 1982.

〔3〕 Faustmann,M.,"Calculation of the Value which Forest Land and Immature Stands Possess for Forestry",1849,English Edition in *Martin Faustmann and the Evolution of Discounted Cash Flow*,(Gane,M.,ed.)Institute Paper42,Commonwealth Forestry Institute,Oxford University,1968, 27-55.

〔4〕 Goundrey,G.K.,"Forest Management and the Theory of Capital",*Canadian Journal of Economics and Political Science*,26, 1960, 439-451.

〔5〕 Hartman,R.,"The Harvesting Decision When a Standing Forest has Value", *Economic Inquiry*,14, 1976, 52-58.

〔6〕 Lancaster,K.,*Mathematical Economics*,Macmillan,1968.

〔7〕 Löfgren,K.G.and Johansson,P.O.,*Forest Economics and the Economics of Natural Resources*,Department of Forest Economics,Sveriges Lantbruksuniversitet,1982.

〔8〕 Mitra,T.and Wan,H.Y.,"Some Theoretical Results on the Economics of Forestry",*Review of Economic Studies*,52, 1985, 263-282.

〔9〕 Samuelson,P.A.,"Economics of Forestry in an Evolving Society",Economic Inquiry,14, 1976, 466-492.

〔10〕 只木良也，吉良竜夫編「ヒトと森林—森林の環境調節作用」 共立出版，1982.